BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Subiectul I: „*Interferența luminii*"	**Punctaj parțial**	**Total**
A.		
a)		**2p**
Condiția de obținere a maximelor luminoase pe semiaxa Ox, este ca diferența de drum optic să fie multiplu de lungimi de undă: $$r_2 - r_1 = m\lambda$$	0,5p	
Deoarece $r_2 > r_1$ rezultă că $m > 0$, adică valorile posibile pentru m sunt: $m = 1,2,3, ...$	0,5p	
Drumurile r_1 și r_2 sunt date de relațiile: $$r_2 = \sqrt{a^2 + x^2}$$ $$r_1 = x$$	0,2p	
După calcule obținem coordonata maximelor luminoase: $$x = \frac{a^2 - (m\lambda)^2}{2m\lambda} = x_m$$	0,3p	
Distanța dintre două maxime succesive depinde de ordinul m : $$\lvert\Delta x\rvert = \lvert x_{m+1} - x_m\rvert = \left\lvert\frac{a^2 - [(m+1)\lambda]^2}{2(m+1)\lambda} - \frac{a^2 - (m\lambda)^2}{2m\lambda}\right\rvert = \frac{a^2 + m(m+1)\lambda^2}{2m(m+1)\lambda}$$ ca urmare maximele luminoase de pe semiaxa Ox nu sunt echidistante.	0,5p	
b)		**1p**
Deoarece $x > 0$, pentru că maximele luminoase pot fi doar pe semiaxa Ox, rezultă că $(m\lambda)^2 < a^2$.	0,5p	
Știm că $m > 0$, deci: $$m < \frac{a}{\lambda} = 181{,}81$$ Deoarece m este un întreg, rezultă că $m = 181$, adică pe semiaxa Ox se formează $m = 181\ maxime\ luminoase.$	0,5p	
c)		**1p**
Pentru $m = 1$ obținem $x_1 = \frac{a^2-\lambda^2}{2\lambda} \cong 9{,}09\text{mm}$ (*cel mai depărtat maxim luminos de pe semiaxa Ox*).	0,5p	
Pentru $m = 181$ obținem $x_{181} = \frac{a^2-(m\lambda)^2}{2m\lambda} \cong 0{,}45\mu\text{m}$ (*cel mai apropiat maxim luminos de pe semiaxa Ox*).	0,5p	
d)		**3p**
Intensitatea luminoasă dintr-un punct este direct proporțională cu pătratul amplitudinii vectorului câmp electric rezultant *(vectorul luminos)* din acel punct $I = k\lvert E\rvert^2$, relație în care $k = constant\breve{a}\ pozitiv\breve{a}$.	0,5p	
Vectorii $\vec{E}_1$ și $\vec{E}_2$, fiind paraleli putem scrie: $$E = E_1 + E_2 = E_0\left[\frac{1}{r_1}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}r_1\right) + \frac{1}{r_2}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}r_2\right)\right]$$ Utilizând reprezentarea fazorială obținem: $$I = kE_0^2\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1r_2}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)\right)$$ Sau: Putem calcula amplitudinea/modulul vectorului câmp electric rezultant și folosind reprezentarea celor două unde plane electromagnetice în mulțimea numerelor complexe: $$E_1 = \frac{E_0}{r_1}e^{i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}r_1)} \quad \text{și} \quad E_2 = \frac{E_0}{r_2}e^{i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}r_2)}$$	0,5p	

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Putem scrie: $\lvert E\rvert^2 = E\cdot E^* = (E_1+E_2)\cdot(E_1^*+E_2^*) = \lvert E_1\rvert^2+\lvert E_2\rvert^2+E_1\cdot E_2^*+E_1^*\cdot E_2$ $E_1\cdot E_2^* = \frac{E_0^2}{r_1r_2}e^{i(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}r_1-\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}r_2)} = \frac{E_0^2}{r_1r_2}e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)}$ $E_1^*\cdot E_2 = \frac{E_0^2}{r_1r_2}e^{i(-\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}r_1+\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}r_2)} = \frac{E_0^2}{r_1r_2}e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)}$ iar: $E_1\cdot E_2^*+E_1^*\cdot E_2 = \frac{E_0^2}{r_1r_2}\left[e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)}+e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)}\right] = \frac{E_0^2}{r_1r_2}2\cos\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)$ Astfel: $I = kE_0^2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{2}{r_1r_2}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)\right)$		
Pentru maxime luminoase $r_2-r_1=m\lambda$, deci $\cos\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=cos2\pi m=1$ și obținem: $I = kE_0^2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{2}{r_1r_2}\right) = kE_0^2\left(\frac{r_1+r_2}{r_1r_2}\right)^2$	0,5p	
Înlocuind r_1 și r_2 obținem $I = kE_0^2\frac{\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)^2}{x^2(a^2+x^2)}$	0,5p	
Ținând cont de expresia $x_m = \frac{a^2-(m\lambda)^2}{2m\lambda}$, după calcule se obține: $I_m = (16kE_0^2a^4\lambda^2)\frac{m^2}{(a^4-m^4\lambda^4)^2}$	0,5p	
Raportul dintre intensitatea luminoasă a celui mai apropiat maxim de pe semiaxa Ox față de originea O și intensitatea luminoasă a maximului imediat următor, respectiv pentru $m=181$ și $(m-1)=180$: $\frac{I_m}{I_{m-1}} = \frac{m^2}{(a^4-m^4\lambda^4)^2}\cdot\frac{(a^4-(m-1)^4\lambda^4)^2}{(m-1)^2}$ $\frac{I_{181}}{I_{180}} \cong 4{,}91$	0,5p	
B.		
Segmentul luminos este echivalent cu o mulțime de surse luminoase punctiforme, deplasate mai mult sau mai puțin pe o direcție perpendiculară pe axa de simetrie a dispozitivului, fie deasupra axei fie sub aceasta, cu excepția sursei punctiforme din centrului segmentului, care este situată chiar pe axa de simetrie.	0,5p	
Să considerăm o sursă punctiformă situată pe axa de simetrie a dispozitivului și figura de interferență corespunzătoare de pe ecran. Deplasarea acestei surse punctiforme pe distanța y, pe o direcție perpendiculară pe axa de simetrie a dispozitivului, provoacă o deplasare $\frac{yD}{d}$ a figurii de interferență, fără a-i modifica structura și implicit interfranja. Cea mai mare deplasare a figurii de interferență este provocată de sursele de la capetele segmentului luminos, respectiv pentru $y=\frac{b}{2}$.	0,5p	**3p**
În comparație cu figura de interferență generată de o sursă punctiformă situată pe axa de simetrie a dispozitivului, mulțimea continuă de surse punctiforme de pe segmentul luminos, situate de o parte și de alta a axei de simetrie, până la capetele segmentului luminos, vor genera o figură de interferență ale cărei franje luminoase se lățesc/lărgesc, respectiv au o dimensiune transversală mărită $\Delta = 2\cdot\left(\frac{yD}{d}\right) = \frac{bD}{d}$.	1p	
Figura de interferență devine neclară atunci când lărgimea franjelor luminoase devine egală cu interfranja sau mai mare decât aceasta:	1p	

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

$\Delta \geq i\,,\ \frac{bD}{d} \geq \frac{\lambda D}{a} \Rightarrow d \leq \frac{ba}{\lambda}$ Situația limită corespunde pentru $d = \frac{ba}{\lambda}$, respectiv pentru distanța $d \cong 364\text{mm}$.		
O altă abordare: Considerăm un punct oarecare de pe segmentul luminos, de coordonată y, $y \in \left[-\frac{b}{2};\frac{b}{2}\right]$. Pentru razele provenind de la acest punct care, după trecerea prin fante, interferă într-un punct oarecare de pe ecran situat la distanța x față de axa de simetrie, diferența de fază este: $$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D} - \frac{2\pi}{\lambda}\frac{ay}{d}$$ Deoarece $E^2 = E_0^2 + E_0^2 + 2E_0^2\cos\Delta\varphi$, obținem: $$I = 2I_0 + 2I_0\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D} - \frac{2\pi}{\lambda}\frac{ay}{d}\right)\frac{dx}{b}$$ Adică: $I = 2I_0\left[1+\cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right)\frac{\sin\left(\frac{\pi ab}{\lambda d}\right)}{\frac{\pi ab}{\lambda d}}\right]$ Micșorând distanța d, prima valoare pentru care franjele de interferență dispar este cea corespunzătoare valorii $\frac{\pi ab}{\lambda d} = \pi$, deci $d = \frac{ba}{\lambda}$		

Subiectul II: „Ciocniri interatomice”	**Punctaj parțial**	**Total**
a) Din expresiile legilor de conservare a energiei și impulsului, în aproximația clasică, nerelativistă: $m_1v_0 = m_1v_1 + m_2v_2 \quad (1)$	0,5 p	**3 p**
$m_1\frac{v_0^2}{2} = m_1\frac{v_1^2}{2} + m_2\frac{v_2^2}{2} + E_{ion} \quad (2)$ unde v_0 și v_1 sunt vitezele ionului de He^+ înainte și după ciocnire, v_2 este viteza atomului de H după ciocnire iar E_{ion} este energia de ionizare a atomului de H.	0,5 p	
Eliminând v_2 între relațiile (1) și (2) găsim: $v_1^2(1+m_1/m_2) - 2v_0v_1.m_1/m_2 + (m_1/m_2 - 1)v_0^2 + 2E_{ion}/m_1 = 0 \quad (3)$	0,5 p	
Din condiția de existență a soluțiilor: $\Delta = v_0^2 - 2E_{ion}(1/m_1 + 1/m_2) \geq 0$	0,3 p	
găsim energia minimă cerută: $E_{0,\min} = \frac{m_1v_{0,\min}^2}{2} = E_{ion}(1+m_1/m_2)$	0,3 p	
Numeric: $E_{0,\min} = 68\,\text{eV}$	0,1 p	

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

$v_{0,\min}=\sqrt{\dfrac{2E_{0,\min}}{m_1}}=c\sqrt{\dfrac{2E_{0,\min}}{m_1c^2}}$	0,2 p	
$v_1=v_2=\dfrac{m_1v_{0,\min}}{m_1+m_2}$	0,3 p	
Numeric $v_{0,\min}\cong 5,73\cdot 10^4\,\text{m/s}$; $v_1=v_2=4,58\cdot 10^4\,\text{m/s}$	0,2 p	
Deoarece $v_{0,\min},v_1,v_2 \ll c$ se justifică utilizarea aproximației clasice nerelativiste	0,1 p	
Obs: Viteza termică a atomilor de H : $v_{2T}=\sqrt{\dfrac{3kT}{m_2}}=c\sqrt{\dfrac{3kT}{m_2c^2}}\Rightarrow \Rightarrow v_{2T}=5\cdot 10^3\,\text{m/s}$ Comparația dintre viteza termică a atomilor de H și viteza ionilor de He^+ $v_{2T}<v_{0,\min}$ justifică în primă aproximație considerarea în repaus a atomilor de H .		
b) Energia fotonului emis în sistemul de referință propriu al ionului de He^+ : $E_{f0}=hcRZ^2(\dfrac{1}{n_2^2}-\dfrac{1}{n_1^2})\Rightarrow E_{f0}=4E_{ion}(\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{16})=\dfrac{7}{36}E_{ion}$	0,5 p	**2 p**
Frecvența fotonului în sistemul de referință terestru: $\nu=\nu_0\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}=\nu_0\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta}=\nu_0\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}$;	0,5 p	
Energia acestuia: $E_f=h\nu=h\nu_0\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}=E_{f0}\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}=\dfrac{7}{36}\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}E_{ion}$	0,5 p	
Energia minimă de excitare a atomului de H corespunde tranziției de pe nivelul fundamental pe nivelul imediat superior deci: $E_f=hcR(1-\dfrac{1}{4})=\dfrac{3}{4}hcR=\dfrac{3}{4}E_{ion}$	0,3 p	
Găsim astfel: $\dfrac{7}{36}\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}E_{ion}=\dfrac{3}{4}E_{ion}\Rightarrow \beta=\dfrac{680}{778}\Rightarrow \text{v}\cong 2,62\cdot 10^8\,\text{m/s}$.	0,2 p	
c) Lungimea de undă maximă a seriei Lyman: $\dfrac{1}{\lambda_{\max}}=R(1-\dfrac{1}{4})\Rightarrow \lambda_{\max}=\dfrac{4}{3R};\lambda_{\max}\cong 121,5\,\text{nm}$	0,5 p	**3 p**
$\dfrac{\nu_0}{1+\beta}\le \upsilon=\dfrac{\nu_0}{1-\beta\cos\theta}\le\dfrac{\nu_0}{1-\beta}\Rightarrow$	0,5 p	
$\Delta\nu=\nu_0(\dfrac{1}{1-\beta}-\dfrac{1}{1+\beta})=\nu_0\dfrac{2\beta}{1-\beta^2}\cong 2\beta\nu_0$	0,5 p	
$\Delta\lambda_T=\Delta(\dfrac{c}{\nu})=c\dfrac{\Delta\nu}{\nu_0^2}=\lambda\dfrac{\Delta\nu}{\nu_0}\cong 2\beta\lambda_{\max}$ unde $\beta=\dfrac{v_{2T}}{c}=\dfrac{5\cdot 10^3\,\text{m/s}}{3\cdot 10^8\,\text{m/s}}\cong 1,67\cdot 10^{-5}$	0,5 p	
În final $\Delta\lambda_T\cong 4,05\cdot 10^{-3}\,\text{nm}$	0,2 p	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Din aplicarea principiului incertitudinii al lui Heisenberg se poate estima lărgimea naturală a liniei spectrale: $\Delta E\cdot\Delta t\approx\frac{h}{2\pi}\Rightarrow h\Delta\nu\cdot\tau\approx\frac{h}{2\pi}\Leftrightarrow c\frac{\Delta\lambda_n}{\lambda_{\max}^2}\cdot\tau\approx\frac{1}{2\pi}\Rightarrow\Delta\lambda_n\approx\frac{\lambda_{\max}^2}{2\pi c\tau}$	0,6 p	
Numeric $\Delta\lambda_n\approx 7{,}83\cdot10^{-7}\,\mathrm{nm}\Rightarrow\frac{\Delta\lambda_T}{\Delta\lambda_n}\approx 5{,}17\cdot10^{3}$	0,2 p	
d) Intensitatea unei linii spectrale este proporțională cu numărul de atomi aflați în starea excitată de pe care se realizează tranziția: $I\sim N$	0,5 p	**2 p**
Raportul intensității liniei spectrale, la începutul și sfârșitul intervalului de timp $t=\frac{d}{v}$ necesar parcurgerii distanței d este dat de: $\eta=\frac{I_2}{I_1}=\frac{N_2}{N_1}=e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{1}{n}$ unde τ este timpul mediu de viață al stării excitate;	0,5 p	
$\tau=\frac{d}{v\ln n}$;	0,5 p	
Numeric: $\tau\approx 1{,}73\,\mu\mathrm{s}$	0,5 p	

<table>
<tr><td>Subiectul III: „Dezintegrarea Pionului”</td><td>Punctaj parțial</td><td>Total</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>10 p</td></tr>
<tr><td>a)</td><td>4,00 p</td><td></td></tr>
<tr><td>
Cunoscând forma vectorială a transformărilor Lorentz:

$$\vec{r}\,'=\vec{r}+\vec{u}\cdot\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)\cdot\frac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{u^2}-\frac{t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right],$$

unde:

$$\vec{r}\,'=x'\vec{i}\,'+y'\vec{j}\,'+z'\vec{k}\,';\quad \vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k};$$

$$\vec{u}=u_x\vec{i}+u_y\vec{j}=u\cdot\sin\alpha\cdot\vec{i}+u\cdot\cos\alpha\cdot\vec{j};$$

$$\vec{u}\cdot\vec{r}=x\cdot u\cdot\sin\alpha+y\cdot u\cdot\cos\alpha=u(x\sin\alpha+y\cos\alpha),$$

rezultă:

$$x'\vec{i}\,'+y'\vec{j}\,'+z'\vec{k}\,'=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}+$$

$$+u(\sin\alpha\cdot\vec{i}+\cos\alpha\cdot\vec{j})\cdot\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)\cdot\frac{u\cdot(x\sin\alpha+y\cos\alpha)}{u^2}-\frac{t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right],$$

astfel încât, identificând coeficienții versorilor paraleli, obținem:
</td><td></td><td></td></tr>
</table>

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

1) $\vec{i}\,';\vec{i}$ $$x'=x+u\cdot\sin\alpha\cdot\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)\cdot\frac{u(x\sin\alpha+y\cos\alpha)}{u^2}-\frac{t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right];$$ $$x'=x+u\cdot\sin\alpha\cdot\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)\cdot\frac{\sin\alpha}{u}x+\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)\cdot\frac{\cos\alpha}{u}y-\frac{t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right];$$ $$x'=x+\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)\cdot\sin^2\alpha\cdot x+\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot y-\frac{ut\cdot\sin\alpha}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right];$$ $$x'=\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)\cdot\sin^2\alpha+1\right]\cdot x+\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot y-\frac{ut\cdot\sin\alpha}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};$$ $$x=0;\quad y=-a;\quad z=0;\ t;$$ $$x'=-\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot a+\frac{ut\cdot\sin\alpha}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};\quad \Gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}};$$ $x'=-(\Gamma-1)\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot a-\Gamma\cdot ut\cdot\sin\alpha;$ ……… **1 punct**		
2) $\vec{j}\,';\vec{j}$ $$y'=y+u\cdot\cos\alpha\cdot\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)\cdot\frac{u\cdot(x\sin\alpha+y\cos\alpha)}{u^2}-\frac{t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right];$$ $$y'=y+u\cdot\cos\alpha\cdot\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)\cdot\frac{\sin\alpha}{u}\cdot x+\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)\cdot\frac{\cos\alpha}{u}\cdot y-\frac{t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right];$$		

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

$$y' = y + \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot x + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)\cdot\cos^2\alpha\cdot y - \frac{ut\cdot\cos\alpha}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right];$$ $$y' = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot x + \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)\cdot\cos^2\alpha+1\right]\cdot y - \frac{ut\cdot\cos\alpha}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};$$ $$x=0;\quad y=-a;\quad z=0;\ t;$$ $$y' = -\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)\cdot\cos^2\alpha+1\right]\cdot a - \frac{ut\cdot\cos\alpha}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}};\quad \Gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}};$$ $y' = -\left[(\Gamma-1)\cdot\cos^2\alpha+1\right]\cdot a - \Gamma\cdot ut\cdot\cos\alpha;$ .... **1 punct**		
3) $\vec{k}';\vec{k}$ $z' = z = 0.$ .... **1 punct**		
4) În plus, din relația: $$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot\left(t-\frac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c^2}\right),$$ rezultă: $$\vec{u}\cdot\vec{r} = x\cdot u\cdot\sin\alpha + y\cdot u\cdot\cos\alpha = u\cdot(x\sin\alpha + y\cos\alpha);$$ $$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot\left(t-\frac{ux\sin\alpha+uy\cos\alpha}{c^2}\right);$$ $$x=0;\quad y=-a;\quad z=0;\ t=0;$$ $$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot\left(t+\frac{ua\cos\alpha}{c^2}\right);\quad \Gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}};$$ $t' = \Gamma\cdot\left(t+\frac{ua\cos\alpha}{c^2}\right).$ .... **1 punct**		
b)	3,00 p	
Utilizând forma vectorială a transformărilor Lorentz, rezultă: $$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{u}\cdot\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)\cdot\frac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{u^2} - \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}}\right];$$		

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

$$t'=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\left(t-\frac{\vec{u}\cdot\vec{r}}{c^2}\right);$$ $$\vec{v}'=\frac{d\vec{r}\,'}{dt'}=\frac{d\vec{r}+\vec{u}\cdot\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)\cdot\frac{\vec{u}\cdot d\vec{r}}{u^2}-\frac{dt}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]}{\frac{dt-\frac{\vec{u}\cdot d\vec{r}}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}};$$ $$\vec{v}'=\frac{\frac{d\vec{r}}{dt}+\vec{u}\cdot\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)\cdot\frac{\vec{u}}{u^2}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]}{\frac{1-\frac{\vec{u}}{c^2}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}}{\sqrt{1-\beta^2}}};$$ $$\vec{v}'=\frac{\vec{v}+\vec{u}\cdot\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)\cdot\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{u^2}-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]}{\frac{1-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}};\quad \Gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}};$$ $$\vec{v}'=\frac{\vec{v}+\vec{u}\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{u^2}-\Gamma\right]}{\Gamma\cdot\left(1-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)},$$ **……………. 1,25 puncte** reprezentând viteza pe care o are NEUTRINO în raport cu observatorul O' din sistemul inerțial mobil, R', unde: $$\vec{v}'=v'_{x'}\vec{i}\,'+v'_{y'}\vec{j}\,'+v'_{z'}\vec{k}\,';$$ $$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k};$$ $$\vec{u}=u_x\vec{i}+u_y\vec{j}=u\cdot\sin\alpha\cdot\vec{i}+u\cdot\cos\alpha\cdot\vec{j},$$ astfel încât: $$v'_{x'}\vec{i}\,'+v'_{y'}\vec{j}\,'+v'_{z'}\vec{k}\,'=\frac{v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}}{\Gamma\cdot\left(1-\frac{(u\cdot\sin\alpha\cdot\vec{i}+u\cdot\cos\alpha\cdot\vec{j})\cdot(v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k})}{c^2}\right)}+$$ $$+\frac{(u\cdot\sin\alpha\cdot\vec{i}+u\cdot\cos\alpha\cdot\vec{j})\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{(u\cdot\sin\alpha\cdot\vec{i}+u\cdot\cos\alpha\cdot\vec{j})\cdot(v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k})}{u^2}-\Gamma\right]}{\Gamma\cdot\left(1-\frac{(u\cdot\sin\alpha\cdot\vec{i}+u\cdot\cos\alpha\cdot\vec{j})\cdot(v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k})}{c^2}\right)};$$		

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

$$\mathrm{v'}_{x'}\vec{i}'+\mathrm{v'}_{y'}\vec{j}'+\mathrm{v'}_{z'}\vec{k}'=\frac{\mathrm{v}_x\vec{i}+\mathrm{v}_y\vec{j}+\mathrm{v}_z\vec{k}}{\Gamma\cdot\left(1-\frac{u\cdot\mathrm{v}_x\cdot\sin\alpha+u\cdot\mathrm{v}_y\cdot\cos\alpha}{c^2}\right)}+$$ $$+\frac{\left(u\cdot\sin\alpha\cdot\vec{i}+u\cdot\cos\alpha\cdot\vec{j}\right)\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{u\cdot\mathrm{v}_x\cdot\sin\alpha+u\cdot\mathrm{v}_y\cdot\cos\alpha}{u^2}-\Gamma\right]}{\Gamma\cdot\left(1-\frac{u\cdot\mathrm{v}_x\cdot\sin\alpha+u\cdot\mathrm{v}_y\cdot\cos\alpha}{c^2}\right)}.$$ ....**0,50 puncte**		
Identificând coeficienții versorilor axelor paralele ale celor două sisteme de referință inerțiale, obținem: **1)** $\vec{i}';\vec{i}$ $$\mathrm{v'}_{x'}=\frac{\mathrm{v}_x}{\Gamma\cdot\left(1-\frac{u\cdot\mathrm{v}_x\cdot\sin\alpha+u\cdot\mathrm{v}_y\cdot\cos\alpha}{c^2}\right)}+$$ $$+\frac{u\cdot\sin\alpha\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{u\cdot\mathrm{v}_x\cdot\sin\alpha+u\cdot\mathrm{v}_y\cdot\cos\alpha}{u^2}-\Gamma\right]}{\Gamma\cdot\left(1-\frac{u\cdot\mathrm{v}_x\cdot\sin\alpha+u\cdot\mathrm{v}_y\cdot\cos\alpha}{c^2}\right)};$$ $$\mathrm{v'}_{x'}=\frac{\mathrm{v}_x+u\cdot\sin\alpha\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{u\cdot\mathrm{v}_x\cdot\sin\alpha+u\cdot\mathrm{v}_y\cdot\cos\alpha}{u^2}-\Gamma\right]}{\Gamma\cdot\left(1-\frac{u\cdot\mathrm{v}_x\cdot\sin\alpha+u\cdot\mathrm{v}_y\cdot\cos\alpha}{c^2}\right)};$$ $$\mathrm{v}_x=0;\ \mathrm{v}_y=c;$$ $$\mathrm{v'}_{x'}=\frac{u\cdot\sin\alpha\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\Gamma\right]}{\Gamma\cdot\left(1-\frac{u\cdot\cos\alpha}{c}\right)};\quad\Gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}};$$ $$\mathrm{v'}_{x'}=\frac{u\cdot\sin\alpha\cdot\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]}{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\left(1-\frac{u\cdot\cos\alpha}{c}\right)};$$		

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

$$\mathrm{v'}_{x'}=\frac{u\cdot\sin\alpha\cdot\left[\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-1\right]}{\left(1-\frac{u\cdot\cos\alpha}{c}\right)};$$ ………………. **0,50 puncte**

2) $\vec{j}\,';\ \vec{j}$

$$\mathrm{v'}_{x'}\vec{i}\,'+\mathrm{v'}_{y'}\vec{j}\,'+\mathrm{v'}_{z'}\vec{k}\,'=\frac{\mathrm{v_x}\vec{i}+\mathrm{v_y}\vec{j}+\mathrm{v_z}\vec{k}}{\Gamma\cdot\left(1-\frac{u\cdot\mathrm{v_x}\cdot\sin\alpha+u\cdot\mathrm{v_y}\cdot\cos\alpha}{c^2}\right)}+$$
$$+\frac{\left(u\cdot\sin\alpha\cdot\vec{i}+u\cdot\cos\alpha\cdot\vec{j}\right)\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{u\cdot\mathrm{v_x}\cdot\sin\alpha+u\cdot\mathrm{v_y}\cdot\cos\alpha}{u^2}-\Gamma\right]}{\Gamma\cdot\left(1-\frac{u\cdot\mathrm{v_x}\cdot\sin\alpha+u\cdot\mathrm{v_y}\cdot\cos\alpha}{c^2}\right)};$$

$$\mathrm{v'}_{x'}\vec{i}\,'+\mathrm{v'}_{y'}\vec{j}\,'+\mathrm{v'}_{z'}\vec{k}\,'=\frac{\mathrm{v_x}\vec{i}+\mathrm{v_y}\vec{j}+\mathrm{v_z}\vec{k}}{\Gamma\cdot\left(1-\frac{u\cdot\mathrm{v_x}\cdot\sin\alpha+u\cdot\mathrm{v_y}\cdot\cos\alpha}{c^2}\right)}+$$
$$+\frac{\left(u\cdot\sin\alpha\cdot\vec{i}+u\cdot\cos\alpha\cdot\vec{j}\right)\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{u\cdot\mathrm{v_x}\cdot\sin\alpha+u\cdot\mathrm{v_y}\cdot\cos\alpha}{u^2}-\Gamma\right]}{\Gamma\cdot\left(1-\frac{u\cdot\mathrm{v_x}\cdot\sin\alpha+u\cdot\mathrm{v_y}\cdot\cos\alpha}{c^2}\right)};$$

$$\mathrm{v'}_{y'}=\frac{\mathrm{v_y}}{\Gamma\cdot\left(1-\frac{u\cdot\mathrm{v_x}\cdot\sin\alpha+u\cdot\mathrm{v_y}\cdot\cos\alpha}{c^2}\right)}+$$
$$+\frac{u\cdot\cos\alpha\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{u\cdot\mathrm{v_x}\cdot\sin\alpha+u\cdot\mathrm{v_y}\cdot\cos\alpha}{u^2}-\Gamma\right]}{\Gamma\cdot\left(1-\frac{u\cdot\mathrm{v_x}\cdot\sin\alpha+u\cdot\mathrm{v_y}\cdot\cos\alpha}{c^2}\right)};$$

$$\mathrm{v'}_{y'}=\frac{\mathrm{v_y}+u\cdot\cos\alpha\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{u\cdot\mathrm{v_x}\cdot\sin\alpha+u\cdot\mathrm{v_y}\cdot\cos\alpha}{u^2}-\Gamma\right]}{\Gamma\cdot\left(1-\frac{u\cdot\mathrm{v_x}\cdot\sin\alpha+u\cdot\mathrm{v_y}\cdot\cos\alpha}{c^2}\right)};$$

$$\mathrm{v_x}=0;\ \ \mathrm{v_y}=c;$$

$$\mathrm{v'}_{y'}=\frac{c+u\cdot\cos\alpha\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\Gamma\right]}{\Gamma\cdot\left(1-\frac{u\cdot\cos\alpha}{c}\right)};\ \ \Gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

$$\mathrm{v}'_{y'}=\frac{c+u\cdot\cos\alpha\cdot\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]}{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\left(1-\frac{u\cdot\cos\alpha}{c}\right)};$$

$$\mathrm{v}'_{y'}=\frac{c+u\cdot\cos\alpha\cdot\left[\left(\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]}{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\left(1-\frac{u\cdot\cos\alpha}{c}\right)};$$

$$\mathrm{v}'_{y'}=\frac{c+u\cdot\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\left[\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-1\right]}{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\left(1-\frac{u\cdot\cos\alpha}{c}\right)};$$ ……………. **0,50 puncte**

3) $\vec{k}';\vec{k}$

$$\mathrm{v}'_{z'}=\frac{\mathrm{v}_z}{\Gamma\cdot\left(1-\frac{u\cdot\mathrm{v}_x\cdot\sin\alpha+u\cdot\mathrm{v}_y\cdot\cos\alpha}{c^2}\right)};$$

$\mathrm{v}_z=0;\ \mathrm{v}'_{z'}=0.$ ……………………………………… **0,25 puncte**

Concluzie:

$$\vec{\mathrm{v}}'=\vec{\mathrm{v}}'_{x'}+\vec{\mathrm{v}}'_{y'}=\mathrm{v}'_{x'}\cdot\vec{i}\,'+\mathrm{v}'_{y'}\cdot\vec{j}\,',$$

adică vectorul $\vec{\mathrm{v}}'$, reprezentând viteza pe care NEUTRINO o are în raport cu observatorul O' din sistemul inerțial R', se află în planul $\mathrm{X}'\mathrm{O}'\mathrm{Y}'$.

c)	3,00 p	

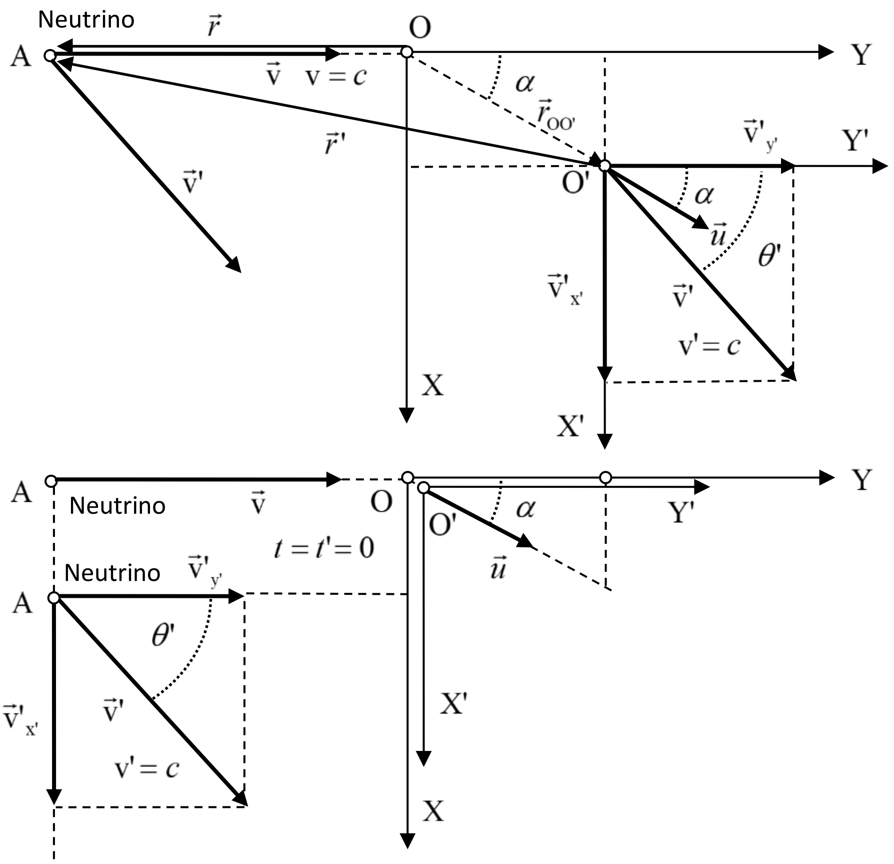
Am demonstrat că:

$$\mathrm{v}'_{x'}=\frac{u\cdot\sin\alpha\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\Gamma\right]}{\Gamma\cdot\left(1-\frac{u\cdot\cos\alpha}{c}\right)};\ \mathrm{v}'_{y'}=\frac{c+u\cdot\cos\alpha\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\Gamma\right]}{\Gamma\cdot\left(1-\frac{u\cdot\cos\alpha}{c}\right)};$$

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

$\vec{v}'=\dfrac{\vec{v}+\vec{u}\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{u^2}-\Gamma\right]}{\Gamma\cdot\left(1-\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)};\ \Gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}};$ $\vec{v}'=\dfrac{\vec{v}+\vec{u}\cdot\left[\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)\cdot\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{u^2}-\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]}{\dfrac{1-\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}};$ $v'_{x'}=\dfrac{u\cdot\sin\alpha\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\dfrac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\Gamma\right]}{\Gamma\cdot\left(1-\dfrac{u\cdot\cos\alpha}{c}\right)};\ v'_{x'}=\dfrac{u\cdot\sin\alpha\cdot\left[\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)\cdot\dfrac{c\cdot\cos\alpha}{u}-1\right]}{\left(1-\dfrac{u\cdot\cos\alpha}{c}\right)};$ $v'_{x'}=\dfrac{u\cdot\sin\alpha\cdot\left[\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)\cdot\dfrac{c\cdot\cos\alpha}{u}-1\right]}{\left(1-\dfrac{u\cdot\cos\alpha}{c}\right)};\ v'_{x'}=\dfrac{u\cdot\sin\alpha\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\dfrac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\Gamma\right]}{\Gamma\cdot\left(1-\dfrac{u\cdot\cos\alpha}{c}\right)};$ $v'_{y'}=\dfrac{c+u\cdot\cos\alpha\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\dfrac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\Gamma\right]}{\Gamma\cdot\left(1-\dfrac{u\cdot\cos\alpha}{c}\right)};$ $v'_{y'}=\dfrac{c+u\cdot\cos\alpha\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\left[\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)\cdot\dfrac{c\cdot\cos\alpha}{u}-1\right]}{\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\left(1-\dfrac{u\cdot\cos\alpha}{c}\right)};$ $\vec{v}'=\dfrac{\vec{v}+\vec{u}\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{u^2}-\Gamma\right]}{\Gamma\left(1-\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)};$ $\vec{u}=u\cdot\sin\alpha\cdot\vec{i}+u\cdot\cos\alpha\cdot\vec{j};\ \vec{v}=\vec{v}_y=v_y\cdot\vec{j}=c\cdot\vec{j};$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=u\cdot c\cdot\cos\alpha;$ $\vec{v}'=\dfrac{c\cdot\vec{j}+u\cdot\left(\sin\alpha\cdot\vec{i}+\cos\alpha\cdot\vec{j}\right)\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\dfrac{c\cdot u\cdot\cos\alpha}{u^2}-\Gamma\right]}{\Gamma\left(1-\dfrac{c\cdot u\cdot\cos\alpha}{c^2}\right)};$		

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

$$\vec{v}'=\frac{u\cdot\sin\alpha\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{c\cdot u\cdot\cos\alpha}{u^2}-\Gamma\right]}{\Gamma\left(1-\frac{c\cdot u\cdot\cos\alpha}{c^2}\right)}\cdot\vec{i}+\frac{c+u\cdot\cos\alpha\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{c\cdot u\cdot\cos\alpha}{u^2}-\Gamma\right]}{\Gamma\left(1-\frac{c\cdot u\cdot\cos\alpha}{c^2}\right)}\vec{j};$$ $$\vec{v}'=\vec{v}'_{x'}+\vec{v}'_{y'}=v'_{x'}\cdot\vec{i}\,'+v'_{y'}\cdot\vec{j}\,';$$ $$v'_{x'}=\frac{u\cdot\sin\alpha\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\Gamma\right]}{\Gamma\left(1-\frac{u\cdot\cos\alpha}{c}\right)};\ v'_{y'}=\frac{c+u\cdot\cos\alpha\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\Gamma\right]}{\Gamma\left(1-\frac{u\cdot\cos\alpha}{c}\right)},$$ astfel încât, în acord cu notațiile din figura 2, rezultă:		
 **Fig. 2** **1)** $$v'^2=v'^2_{x'}+v'^2_{y'}=F(\text{fractie})=\frac{N(\text{numarator})}{n(\text{numitor})};$$		

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

$N=u^2\cdot\sin^2\alpha\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\Gamma\right]^2+c^2+u^2\cdot\cos^2\alpha\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\Gamma\right]^2+$ $+2\cdot c\cdot u\cdot\cos\alpha\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\Gamma\right];$ $N=u^2\cdot(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\Gamma\right]^2+$ $+2\cdot c\cdot u\cdot\cos\alpha\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\Gamma\right]+c^2;$ $N=u^2\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\Gamma\right]^2+2\cdot c\cdot u\cdot\cos\alpha\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\Gamma\right]+c^2;$ $N=\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\Gamma\right]\cdot\{[(\Gamma-1)\cdot c\cdot u\cdot\cos\alpha-u^2\cdot\Gamma]+2\cdot c\cdot u\cdot\cos\alpha\}+c^2;$ $N=\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\Gamma\right]\cdot[(\Gamma-1)\cdot c\cdot u\cdot\cos\alpha-u^2\Gamma+2\cdot c\cdot u\cdot\cos\alpha]+c^2;$ $N=\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\Gamma\right]\cdot[\Gamma\cdot c\cdot u\cdot\cos\alpha-c\cdot u\cdot\cos\alpha-u^2\Gamma+2\cdot c\cdot u\cdot\cos\alpha]+c^2;$ $N=\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\Gamma\right]\cdot[\Gamma\cdot c\cdot u\cdot\cos\alpha+c\cdot u\cdot\cos\alpha-u^2\Gamma]+c^2;$ $N=\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\Gamma\right]\cdot[(\Gamma+1)\cdot c\cdot u\cdot\cos\alpha-u^2\Gamma]+c^2;$ $N=u^2\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\Gamma\right]\cdot\left[(\Gamma+1)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\Gamma\right]+c^2;$ $N=u^2\cdot\left[(\Gamma-1)\cdot(\Gamma+1)\cdot\frac{c^2\cdot\cos^2\alpha}{u^2}-\Gamma\cdot(\Gamma-1)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\Gamma(\Gamma+1)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}+\Gamma^2\right]+c^2;$ $N=u^2\cdot\left[(\Gamma^2-1)\cdot\frac{c^2\cdot\cos^2\alpha}{u^2}-\Gamma\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}\cdot(\Gamma-1+\Gamma+1)+\Gamma^2\right]+c^2;$ $N=u^2\cdot\left[(\Gamma^2-1)\cdot\frac{c^2\cdot\cos^2\alpha}{u^2}-2\cdot\Gamma^2\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}+\Gamma^2\right]+c^2;$ $N=\left[(\Gamma^2-1)\cdot u^2\cdot\frac{c^2\cdot\cos^2\alpha}{u^2}-2\cdot\Gamma^2\cdot u^2\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}+u^2\cdot\Gamma^2\right]+c^2;$ $N=[(\Gamma^2-1)\cdot c^2\cdot\cos^2\alpha-2\cdot\Gamma^2\cdot u\cdot c\cdot\cos\alpha+u^2\cdot\Gamma^2]+c^2;$ $N=\Gamma^2(c^2\cdot\cos^2\alpha-2\cdot u\cdot c\cdot\cos\alpha+u^2)-c^2\cdot\cos^2\alpha+c^2;$ $N=\Gamma^2(c\cdot\cos\alpha-u)^2+c^2\cdot\sin^2\alpha;$ $n=\Gamma^2\cdot\left(1-\frac{u\cdot\cos\alpha}{c}\right)^2;$		

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

$$\mathrm{v}'^2 = \frac{N}{n} = \frac{\Gamma^2 \cdot (c \cdot \cos\alpha - u)^2 + c^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \dfrac{\Gamma^2}{\Gamma^2}}{\Gamma^2 \cdot \dfrac{(c - u \cdot \cos\alpha)^2}{c^2}};$$

$$\mathrm{v}'^2 = c^2 \cdot \frac{(c \cdot \cos\alpha - u)^2 + c^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \dfrac{1}{\Gamma^2}}{(c - u \cdot \cos\alpha)^2};$$

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \frac{1}{\Gamma^2} = 1 - \beta^2 = 1 - \frac{u^2}{c^2} = \frac{c^2 - u^2}{c^2};$$

$$\mathrm{v}'^2 = c^2 \cdot \frac{(c \cdot \cos\alpha - u)^2 + c^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \dfrac{c^2 - u^2}{c^2}}{(c - u \cdot \cos\alpha)^2};$$

$$\mathrm{v}'^2 = c^2 \cdot \frac{(c \cdot \cos\alpha - u)^2 + (c^2 - u^2) \cdot \sin^2\alpha}{(c - u \cdot \cos\alpha)^2};$$

$$\mathrm{v}'^2 = c^2 \cdot \frac{c^2 \cdot \cos^2\alpha - 2 \cdot c \cdot u \cdot \cos\alpha + u^2 + c^2 \cdot \sin^2\alpha - u^2 \cdot \sin^2\alpha}{(c - u \cdot \cos\alpha)^2};$$

$$\mathrm{v}'^2 = c^2 \cdot \frac{c^2 - 2 \cdot c \cdot u \cdot \cos\alpha + u^2 \cdot \cos^2\alpha}{(c - u \cdot \cos\alpha)^2};$$

$$\mathrm{v}'^2 = c^2 \cdot \frac{(c - u \cdot \cos\alpha)^2}{(c - u \cdot \cos\alpha)^2};$$

$\mathrm{v}'^2 = c^2$; $\mathrm{v}' = c$, ………………………….. **1,50 puncte**

ceea ce dovedește că pentru NEUTRIN, viteza lui, în raport cu ambele sisteme de referință inerțiale, R și respectiv R', este aceeași, egală cu viteza luminii în vid, c, rezultat în acord cu principiul relativității, conform căruia viteza luminii este aceeași în raport cu orice SRI. ,,,…………… **0,50 puncte**

2)

$$\mathrm{tg}\,\theta' = \frac{\mathrm{v}'_{x'}}{\mathrm{v}'_{y'}};$$

$$\mathrm{v}'_{x'} = \frac{u \cdot \sin\alpha \cdot \left[(\Gamma - 1) \cdot \dfrac{c \cdot \cos\alpha}{u} - \Gamma\right]}{\Gamma\left(1 - \dfrac{u \cdot \cos\alpha}{c}\right)}; \quad \mathrm{v}'_{y'} = \frac{c + u \cdot \cos\alpha \cdot \left[(\Gamma - 1) \cdot \dfrac{c \cdot \cos\alpha}{u} - \Gamma\right]}{\Gamma\left(1 - \dfrac{u \cdot \cos\alpha}{c}\right)},$$

$$\mathrm{tg}\,\theta' = \frac{u \cdot \sin\alpha \cdot \left[(\Gamma - 1) \cdot \dfrac{c \cdot \cos\alpha}{u} - \Gamma\right]}{c + u \cdot \cos\alpha \cdot \left[(\Gamma - 1) \cdot \dfrac{c \cdot \cos\alpha}{u} - \Gamma\right]}; \quad \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

$$\mathrm{tg}\,\theta'=\frac{u\cdot\sin\alpha\cdot\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]}{c+u\cdot\cos\alpha\cdot\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]};$$ $$\mathrm{tg}\,\theta'=\frac{u\cdot\sin\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\left[\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-1\right]}{c+u\cdot\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\left[\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-1\right]};$$ $$\mathrm{tg}\,\theta'=\frac{u\cdot\sin\alpha\cdot\left[\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-1\right]}{c\cdot\sqrt{1-\beta^2}+u\cdot\cos\alpha\cdot\left[\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)\cdot\frac{c\cdot\cos\alpha}{u}-1\right]},$$ .. **1,00 puncte** așa cum indică desenul din figura 2		

Bareme propuse de:

prof. **Florin Butușină** – *Colegiul Național „Simion Bărnuțiu”, Șimleu Silvaniei*
prof. **Cristian Miu** – *Inspectoratul Școlar Județean Olt, Slatina*
prof. **Mihail Sandu** – *Liceul Tehnologic de Turism, Călimănești*
coordonator: prof. **Liviu Blanariu** – *CNPEE, București*